ШИФР (не заполнять)
012431

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по МАТЕМАТИКА вариант 1
(указать предмет)

Выполнил (а)

Фамилия: КОРСУН

Имя: АЛЕКСАНДР

Отчество: ВИКТОРОВИЧ

Класс: 11„Л"

Наименование школы: МБОУ технический лицей №176 Карасукского района, НСО.

Город (село): Карасук

Область: Новосибирская

Площадка проведения : Карасук

Сирота: НЕТ *(указать да/нет)* Инвалид: НЕТ *(указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)*

Дата рождения: 07 / 09 / 1999

Контактный телефон: +7 966 377 89 43

E-mail: aleksnfslls@gmail.com

vk.com/ id222668754

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Ку

ШИФР 12431

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

1	2	3	4	5	Σ
8	8	10	10	8	34 б

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

③ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=-2\cdot\sin\left(\frac{2x+\frac{\pi}{8}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\right)$ по формуле преобразования разности косинусов в произведение.

Воспользуюсь формулой двойного угла и преобразую правую часть уравнения:

$2\cdot\sin\left(\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\right)=-2\cdot\sin\left(\frac{2x+\frac{\pi}{8}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\right)$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cdot\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\right)=0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0\end{array}\right.$

Решу первое уравнение:

$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0.$

$x-\frac{\pi}{16}=\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$ – частный случай. ✓

$x=\pi n+\frac{\pi}{16}$ ✓

Решу второе уравнение:

см. черн.?

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$

По формуле приведения: $\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{16}\right)=$

$=\cos\left(-x+\frac{7\pi}{16}\right)=\cos\left(x-\frac{7\pi}{16}\right).$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(x-\frac{7\pi}{16}\right)=0.$

По формуле преобразования суммы косинусов в произведение:

$2\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{16}+x-\frac{7\pi}{16}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{16}-x+\frac{7\pi}{16}}{2}\right)=0.$

$2\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{3\pi}{16}=0.$ т.к. $\cos\frac{3\pi}{16}\neq 0$; то:

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

$x-\frac{\pi}{4}=\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ ✓ т.к. частный случай.

$x=\pi k+\frac{3\pi}{4}$

На следующей странице.

чистовик

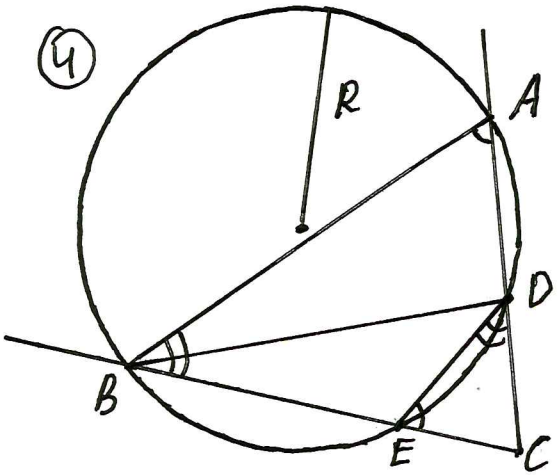
Чистовик

Из всего следует:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n + \frac{\pi}{16}; \ n \in Z \\ x = \pi k + \frac{3\pi}{4}; \ k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ.

4



Дано:
$BD = 5$
$CD = 2$.
$R = 4$

r - ?

Пусть около $\triangle CDE$ описана окружность с радиусом r. Тогда.
$2r = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$ - по теореме синусов. $\Rightarrow$

$$r = \frac{DC}{2 \cdot \sin\angle DEC}.$$

Рассмотрим 4-х угольник $ABED$. Т.к. он вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна $180°$. $\Rightarrow$: $\angle BAD = 180° - \angle BED$; $\angle ABE = 180° - \angle ADE$; $\angle BED = 180° - \angle BAD$; $\angle ADE = 180° - \angle ABE$

Рассмотрим BC и AC: на них лежат $\angle BED$ и $\angle DEC$ и $\angle ADE$ и $\angle EDC$ соответственно $\Rightarrow$:

$$\left.\begin{array}{l} \angle DEC = 180° - \angle BED = 180° - 180° + \angle BAD = \angle BAD. \\ \angle EDC = 180° - \angle ADE = 180° - 180° + \angle ABE = \angle ABE \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$; т.к. $\angle C$ - общий.

Из равенства углов следует: $\sin\angle DEC = \sin\angle BAD$

По теореме синусов: $2R = \frac{BD}{\sin\angle BAD} \Rightarrow$ Δ - ?

$\sin\angle BAD = \sin\angle BEC = \frac{BD}{2R} \Rightarrow$.

$$r = \frac{DC}{2 \cdot \frac{BD}{2R}} = \frac{DC}{BD} \cdot R \Rightarrow$$ Δ - ?

$$r = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Ответ: $r = 1{,}6$.

1

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 13}{x - 1} = \frac{(x+4)(x-1) - 9}{x - 1} = x + 4 - \frac{9}{x-1}.$$

Рассмотрим $f(x) = x + 4 - \frac{9}{x-1}$. Так как по условию задачи $f(x)$ принимает наименьшее значение, то ~~должна~~ ~~Чтобы~~ должно выполняться условие:

$9 \vdots (x - 1)$. Т.к. таких значений мало решу задачу методом перебора. На следующем листе.

Для числа 9 кратными числами будут:

$-9; -3; -1; 1; 3; 9. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=-9 \\ x-1=-3 \\ x-1=-1 \\ x-1=1 \\ x-1=3 \\ x-1=9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=4 \\ x=10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-8)=-8+4-\frac{9}{-8-1}=-4+1=-3 \\ f(-2)=-2+4-\frac{9}{-2-1}=+2+3=5 \\ f(0)=0+4-\frac{9}{0-1}=4+9=13 \\ f(2)=2+4-\frac{9}{2-1}=6-9=-3 \\ f(4)=4+4-\frac{9}{4-1}=8-3=5 \\ f(-10)=10+4-\frac{9}{10-1}=14-1=13. \end{array}\right.$$

~~Из выше приведенных уравн. приведенной системы видно, что наименьшее~~

Из выше приведенной системы видно, что минимальное значение $f(x)$ является -3 при $x=-8$; $x=2$.

Ответ $-8; 2$.

(2) Составим системы уравнений для касательных и параболы и решим их!

I: $\begin{cases} y=2x+10 \\ y=ax^2+bx+1 \end{cases}$

$ax^2+bx+1=2x+10$

$ax^2+(b-2)x-9=0$

$D=(b-2)^2-4\cdot a\cdot(-9)=b^2-4b+4+36a=0$

II: $\begin{cases} y=2-2x \\ y=ax^2+bx+1 \end{cases}$

$ax^2+bx+1=2-2x$

$ax^2+(b+2)x-1=0.$

$D=(b+2)^2-4\cdot a\cdot(-1)=b^2+4b+4+4a=0.$

Т.к. касательные имеют только одну точку пересечения с графиком, то $D=0$ в обеих случаях.

Составим из I и II уравнения систему и решим её:

$\begin{cases} b^2-4b+4+36a=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$ Чтобы избавится от a умножим II-ое уравнение на 9 и вычтем из него I.

$\begin{cases} 9(b^2+4b+4+4a)-(b^2-4b+4+36a)=0. \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9(b^2+4b+4)+9\cdot 4a-(b^2-4b+4)-36a=0. \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9(b^2+4b+4)-(b^2-4b+4)=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

Продолжение на следующем листе.

$$\begin{cases} 3^2(b+2)^2-(b-2)^2=0 \\ b^2+4b+4+4a. \end{cases}$$

Воспользуюсь формулой разности квадратов:

$$\begin{cases} (3(b+2)-(b-2))(3(b+2)+(b-2))=0 \\ b^2+4b+4+4a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3b+6-b+2)(3b+6+b-2)=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2b+8)(4b-4)=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(b+4)\cdot 4\cdot(b-1)=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} b=-4. \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

$16-4\cdot(-4)+4+4a=0.$

$16-16+4+4a=0$

$4a=-4$

$a=-1$

2) $\begin{cases} b=-1. \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

$1+4\cdot(-1)+4+4a=0.$

$1-4+4+4a=0.$

$4a=-1$

$a=-\frac{1}{4}=-0,25$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-4 \\ a=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-0,25 \end{cases} \end{array}\right.$$

ОТВЕТ.

5

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-ax^2-3x^2+3ax+2x-2a\geq 0 \\ x^3-ax^2-3x^2+3ax\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2-ax-3x+3a)+2x-2a\geq 0 \\ x(x^2-ax-3x+3a)\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x\cdot(x-3)-a(x-3)+2x-2a\geq 0. \\ x(x(x-3)-a(x-3)\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot(x-a)\cdot(x-3)+2x-2a\geq 0. \\ x(x-a)\cdot(x-3)\leq 0 \end{cases}$$

№ 5 продолжение:

Разделим I неравенство на -1:

$$\begin{cases} -x\cdot(x-a)\cdot(x-3)+2a-2x\le 0 \\ x\cdot(x-a)\cdot(x-3)\le 0 \end{cases}$$

Сложим I и II-ое неравенство т.к. они имеют одинаковый знак ($\le$).

$$\begin{cases} x\cdot(x-a)\cdot(x-3)-x\cdot(x-a)\cdot(x-3)+2a-2x\le 0 \\ x\cdot(x-a)\cdot(x-3)\le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-2x\le 0 \\ x\cdot(x-a)\cdot(x-3)\le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x\le -2a. \\ x\cdot(x-a)\cdot(x-3)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge a. \\ x\cdot(x-a)\cdot(x-3)\le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим 2-ое неравенство в системе:

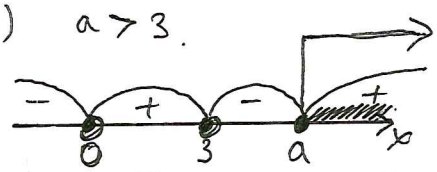
2) $x\cdot(x-a)(x-3)\le 0$. Введем $f(x)$ и найдем нули функции.

$f(x)=x\cdot(x-a)(x-3)=0$.

нули функции: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a. \\ x=3 \end{array}\right.$

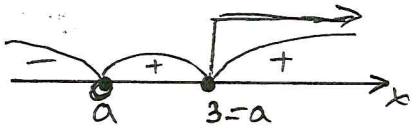
Рассмотрим что происходит с системой при различных значениях a:

I) $a>3$.



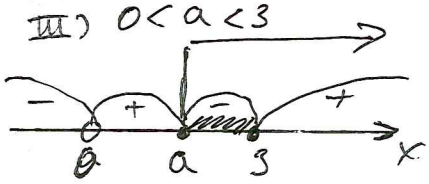
Из системы следует, что $x\in[a;+\infty)$ при $a>3$ $\Rightarrow$ Система имеет несколько решений при $a>3$.

II) $a=3$.



Из системы следует, что единственным решением является $x=3$ $\Rightarrow$ Система имеет единственное решение при $a=3$.

III) $0<a<3$



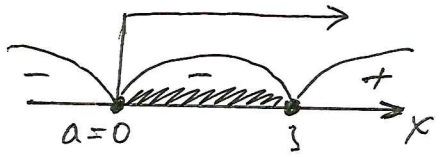
Из системы, следует, что она имеет несколько решений при $0<a<3$.

На следующем листе.

Чистовик. Чистовик.

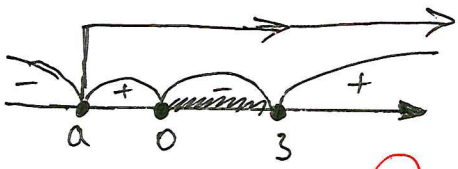
IV) $a = 0$

Из системы, следует, что она имеет несколько решений при $a = 0$



V). $a < 0$.

Из системы, следует, что она имеет несколько решений при $a < 0$.



Ответ $a \leq 3$. ? $a \geq 3$!